# Анализ социальных сетей. Лекция 3
# Сетевые математические модели

Михаил Пожидаев

21 марта 2024 г.

# Идея моделирования

*Что делать, если сеть доступна частично ?*

Если наблюдается только часть элементов сети (узлы и связи между ними), то необходимо построить модель, максимально точно соответствующей наблюдаемым параметрам и оценки вычислять уже на основе модели, заменяя ею недостающую часть сети.

### Роль моделирования:

- обоснование наблюдаемых явлений и оценка влияния различных параметров;
- предсказаний явлений в будущем.

### Пример

Наблюдая историю распространения инфекции, можно прогнозировать развитие эпидемии в будущем и планировать карантинные мероприятия.

# Нормальное распределение

## *И центральная предельная теорема*

$$p_{\mu\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

### Параметры:

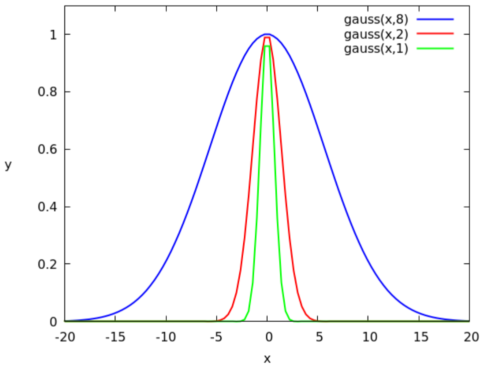
- $\mu$ — математическое ожидание (сдвиг вправо-влево);
- $\sigma$ — дисперсия (толщина «колокола»).

### Центральная предельная теорема

Сумма распределений вероятностей большого количества равных независимых случайных величин стремится к нормальному распределению.

# Нормальные распределения

## *С разной дисперсией*



# Примеры

## *Какие явления подчиняются нормальному закону?*

1. Случайные ошибки измерений.
2. Угол наклона морского пляжа.
3. Размеры беспозвоночных ископаемых организмов.
4. Уровень воды в скважине в течение времени.
5. Результаты испытаний стали на прочность.
6. Топография, плотность морского песка.
7. Показатель окатанности галек разного размера.
8. Плотность заполнения зерен в песчанике.
9. Угол склона речной долины.
10. Содержание влаги в осадочных породах.

# Степенное распределение

## *Распределение Парето или распределение Брэдфорда*

$$p(x) = cx^{-\alpha},$$

где $\alpha$ — ключевой параметр распределения, требующий правильного выбора.

Свойства:

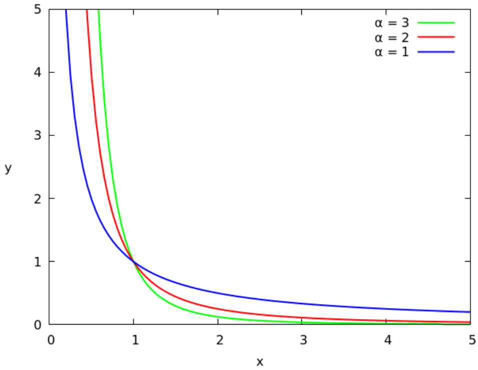
- для малых $x$ не имеет смысла: $x >= x_{min} > 0$;
- любой закон распределения требует нормировки — общая вероятность всегда равна единице: $\int\limits_{x_{min}}^{\infty} cx^{-\alpha} dx = 1$ (в дискретном случае интеграл заменяется суммой).

В результате:

выполнение обоих свойств позволяет определить константу $c = \frac{\alpha - 1}{x_{min} \alpha^{-1}}$ в непрерывном случае и $c = \frac{1}{\sum\limits_{i > x_{min}} i^{-\alpha}}$ в дискретном случае.

# $y = x^{-alpha}$

## Степенное распределение



# Свойства $\alpha$

## *Зависимость распределения от показателя степени*

**При $\alpha \leq 1$:**

распределения не существует, потому что не выполняется условие нормировки: $\int \frac{1}{\alpha} dx = \ln|x|$, а $\lim\limits_{x \to \infty} \ln|x| = \infty$.

**При $\alpha \leq 2$:**

распределение существует, но его математическое ожидание стремится к бесконечности (при любых наблюдениях случайной величины в прошлом новое наблюдение может оказаться значительно больше).

**При $\alpha \leq 3$:**

распределение существует, и математическое ожидание конечно, но дисперсия бесконечна.

Во всех остальных случаях существуют конечные математическое ожидание и дисперсия.

# Как найти $\alpha$?

*Используем метод максимального правдоподобия*

При известном множестве из $n$ наблюдений $x_i$ оценка влияния параметра $\alpha$ выражается следующей функцией:

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} -alpha \ln x_i + n \ln(\alpha - 1) + n(\alpha - 1) \ln x_{min}$$

Дифференцируя это выражение ($\frac{dl}{d\alpha}$) и приравняв её значение к нулю, получим выражение для искомой $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = 1 + n \left( \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{x_{min}} \right)^{-1}$$

Существует отдельная формула для дискретного случая.

# Примеры

## *Что распределено согласно степенному закону?*

1. Размеры лунных кратеров.
2. Частота употребления слов в большинстве языков.
3. Распространённость фамилий.
4. Масштабы аварий в энергосистемах.
5. Число уголовных обвинений на одного преступника.
6. Количество извержений вулканов.

### Если $alpha \leq 2$

Существуют степенные распределения со свойством безмасштабности, среди которых, например, интенсивность солнечных вспышек, для которых сохраняется вероятность появления более мощного наблюдения, чем все предыдущие.

# Модель Эрдёша-Реньи

## *Пуассоновский случайный граф*

Пусть дан граф $G(N, E)$, принадлежащий ансамблю графов со множеством вершин $N$, в котором каждое ребро $e \in E$ принадлежит множеству рёбер полносвязного графа на $N$ с вероятностью $p$. Вероятность появления конкретного графа $G$ при заданном $p$ выражается формулой:

$$P^G = p^m (1-p)^{C_n^2 - m},$$

где $m$ — это количество рёбер в $G$, а $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ — количество сочетаний из $n$ по $k$.

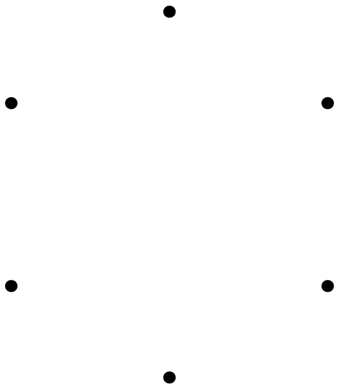
# Характеристики

*Ключевые оценки модели Эрдеша-Реньи*

1. Суммарная степень всех вершин $2m$.
2. Среднее количество рёбер $C_n^2 p = \frac{n(n-1)}{2}$.
3. Средняя степень $c = \frac{2m}{n} = (n-1)p$.
4. Распределение степеней $p(x) = \frac{c^x}{x!}e^{-c}$ — плотность распределения пуассона.
5. Коэффициент кластеризации равен просто $p$ или $\frac{c}{n-1}$, но $\lim\limits_{n-to-infty} \frac{c}{n-1} = 0$, что явно говорит о явно невысокой правдоподобности модели.

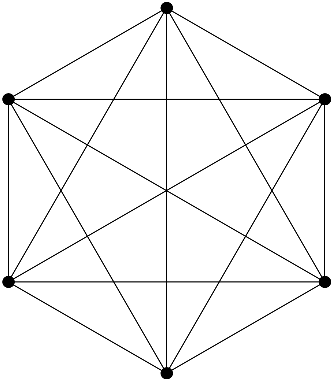
# $p = 0$

## *Отдельные вершины графа*



# $p = 1$

## *Полносвязный граф*



# Фазовый переход

## *И появление гигантского компонента*

### Определение

Гигантский компонент графа — это компонент, размер которого сравним с количеством вершин в графе.

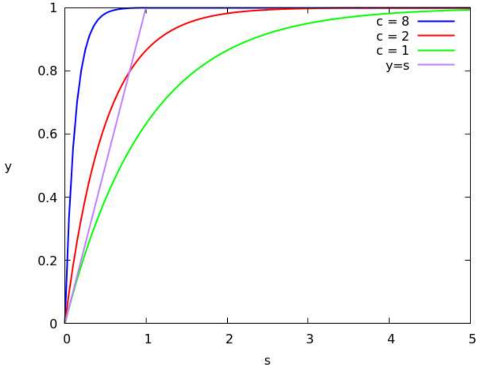
При $p = 0$ гигантский компонент отсутствует, а при $p = 1$ гигантский компонент занимает весь граф. Значение $p$, в котором в графе появляется гигантский компонент, называют точкой фазового перехода.
Если через $s$ обозначить размер гигантского компонента, то он существует, если следующее уравнение имеет решение:

$$s = 1 - e^{-cs},$$

где $c$ — это средняя степень вершин в графе, выражаемая через $p$.

# Фазовый переход

## *Точка появления гигантской компоненты*



# Модель Уоттса-Строгаца

## *Повысим коэффициент кластеризации*

1. Возьмём решётку, в которой каждый узел связан с $c$ соседями ($c = 4$ — квадратная решётка).
2. Выбираем случайное ребро из решётки и заменяем его на случайное другое ребро.
3. Продолжая процесс, мы будем переходить от решётки к случайному графу. В процессе замен кластеризация и диаметр будут уменьшаться.

Интересное наблюдение!

Незначительное количество замен уже приводит к появлению эффекта маленького мира.

# Блочная модель

*И свойство ассортативности*

### При назначение узлам некоторого свойства

Сеть ассортативна, если узлы чаще связываются с узлами, имеющими то же значение свойства. Если чаще не связываются, то сеть дизассортативна.

Блочная модель — разновидность модели Эрдёша-Реньи, в которой все вершины распределены по группам, и задана матрица вероятностей появления ребра между вершинами разных групп.
Использование блочной модели позволяет моделировать сети со свойством ассортативности.

# Спасибо за внимание!

Всё о курсе: https://marigostra.ru/materials/networks.html
E-mail: msp@luwrain.org
Канал в Телеграм: https://t.me/MarigostraRu